E.S.E.O. - E.S.T.I.T. - H.E.I. - I.C.A.M. - I.S.E.N. - I.S.E.P.

CONCOURS D'ENTREE EN 1re ANNEE DU CYCLE INGENIEURS 1987

Samedi 30 Mai 1987 de 8 h à 12 h **Série M**

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

NOTATIONS . $\mathbb{R}^2$ *est muni de sa structure usuelle d'espace vectoriel euclidien orienté ; $i = (1,0)$ et $j = (0,1)$ en est une base orthonormée directe.*

. *id désigne l'application identique de* $\mathbb{R}^2$.

. $M_2(K)$ *désigne l'ensemble des matrices carrées à coefficients dans un corps K.*

. GL_2 *représente le groupe des matrices carrées réelles inversibles d'ordre 2 ; I en est l'élément neutre.*

. Γ *désigne l'ensemble des matrices de* GL_2 *à coefficients dans* $\mathbb{Z}$ *et de déterminant égal à 1.*

. $\mathbb{N}^*$ *désigne l'ensemble des nombres entiers naturels privé de l'élément 0.*

. $\mathbb{Z}^*$ *désigne l'ensemble des nombres entiers relatifs privé de l'élément 0.*

. *On pose :* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

PARTIE I

α et β sont deux endomorphismes linéaires de $\mathbb{R}^2$ vérifiant : $\alpha^2 = -\mathrm{id}$; $\beta \neq \mathrm{id}$; $(\beta - \mathrm{id})^2 = 0$ et $\mathrm{Ker}(\alpha \circ \beta - \mathrm{id}) \neq \{0\}$.

1. Montrer que α et β sont deux automorphismes de $\mathbb{R}^2$. Calculer β^{-1}, puis $\beta^n (n \in \mathbb{Z}^*)$ en fonction de β et de id.

2. Etablir que : $\mathrm{Ker}(\beta - \mathrm{id}) = \mathrm{Im}(\beta - \mathrm{id})$.

3. Montrer que la dimension de $\mathrm{Ker}(\alpha \circ \beta - \mathrm{id})$ est égale à 1. Soit e_2 un vecteur directeur de $\mathrm{Ker}(\alpha \circ \beta - \mathrm{id})$ et $e_1 = -\alpha(e_2)$. Montrer que (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$. Relativement à cette base, donner les matrices représentant les endomorphismes α et β.

PARTIE II

1. Montrer que Γ est un groupe multiplicatif et qu'il a une infinité d'éléments.

2. Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est un élément de Γ et k un élément de $\mathbb{Z}$, calculer MB^kA.

3. Si $a = 0$, montrer qu'il existe un entier relatif k tel que : $MB^kA = \pm I$.
M s'écrit donc AB^{-k} ou $A^{-1}B^{-k}$.

4. Si $(\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}$, établir l'existence d'un entier relatif k tel que : $|\beta + \alpha k| < |\alpha|$. En déduire l'existence d'une suite finie d'entiers relatifs $k_1, k_2, \ldots, k_n$, telle que la matrice $M = \left(B^{k_1} A\right)\left(B^{k_2} A\right) \ldots\ldots \left(B^{k_n} A\right)$ soit de la forme $\begin{pmatrix} 0 & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ où b_n, c_n, d_n sont des entiers que l'on ne demande pas de calculer.
Montrer que tout élément de Γ peut s'écrire uniquement à l'aide de A, A^{-1} et de puissances de B et de B^{-1}.

5. Soit $N = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
Réaliser pratiquement une décomposition du type précédent pour N.

6. Soit M un élément de Γ tel que : $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $M^p = I$.

   a. Montrer que M est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$. Soient λ_1 et λ_2 ses valeurs propres.

   b. Si λ_1 ou λ_2 est réelle, montrer que M est égale à I ou à -I.

   c. Si λ_1 et λ_2 ne sont pas réelles, montrer qu'il existe un réel θ tel que : $\lambda_1 = e^{i\theta}$, $\lambda_2 = e^{-i\theta}$ et $2\cos\theta \in \mathbb{Z}$.

   d. Donner tous les couples possibles pour (λ_1, λ_2), et en déduire que dans tous les cas : $M^{12} = I$.

PARTIE III

On dit que deux matrices M_0 et M_1 appartenant à GL_2, sont en relation $\mathcal{R}$ et on écrit $M_0 \mathcal{R} M_1$ si il existe une application M continue de $[0,1]$ à valeurs dans GL_2, (considéré comme sous-ensemble de l'espace normé $M_2(\mathbb{R})$), telle que : $M(0) = M_0$ et $M(1) = M_1$.

1. Montrer que : $A \mathcal{R} I$ (on pourra utiliser l'application $t \longrightarrow \begin{pmatrix} t & t-1 \\ 1-t & t \end{pmatrix}$). Montrer que : $B \mathcal{R} I$.

2. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur GL_2.

3. Si M, M' et P sont trois éléments de GL_2 tels que $M \mathcal{R} M'$, prouver que : $PM \mathcal{R} PM'$ et $MP \mathcal{R} M'P$.

4. Montrer que tout élément M de Γ vérifie : $M \mathcal{R} I$.

5. Si M est un élément de GL_2 tel que $\det M < 0$, peut-il être en relation $\mathcal{R}$ avec I ?

PARTIE IV

1. Soit (u,v) une base directe de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe une base orthonormée (e,f) telle que la matrice de passage T de (e,f) à (u,v) s'écrive : $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ avec $a > 0$ et $c > 0$.

   Que dire de la matrice de passage de (i,j) à (e,f) ?

2. Soit M un élément de GL_2, tel que $\det M > 0$ et de vecteurs colonnes u et v. Montrer qu'il existe $(\theta, a, b', c) \in \mathbb{R}^4$ tels que : $a > 0$, $c > 0$ et

   $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. En déduire que toute matrice M de GL_2 telle que $\det M > 0$ vérifie : $M \mathcal{R} I$.